

# Algorytmika i kombinatoryka tekstów

Jakub Radoszewski

Wręczenie Nagrody im. W. Lipskiego, 9 października 2014 r.

Instytut Informatyki,  
Uniwersytet Warszawski

# Algorytmika i kombinatoryka tekstów

**Słowo** – ciąg symboli ze skończonego alfabetu (np. abaababa).

**Geneza algorytmiczna:** Problem wyszukiwania wzorca w tekście (algorytm Knutha-Morrisa-Pratta; 1977 r.), problem wyszukiwania wielu wzorców (drzewo sufiksowe; Wiener, 1973 r.).

**Geneza kombinatoryczna:** Nieskończone słowo bekwadratowe nad alfabetem 3-literowym (Thue, 1906 r.).

# Zagadnienia

- 1 Powtórzenia w słowach
- 2 Szablony
- 3 Inne modele równości

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – pod słowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości pod słowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty



# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – pod słowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości pod słowa

b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – podśłowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości podśłowa

b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – pod słowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości pod słowa

b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – pod słowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości pod słowa

b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

# Powtórzenia w słowach

**Okres słowa** – prefiks słowa, który powtarza się przez całe słowo

a b a c a b a c a b a c a b

**Powtórzenie** – pod słowo (spójny fragment słowa), którego najkrótszy okres jest nie dłuższy niż połowa długości pod słowa

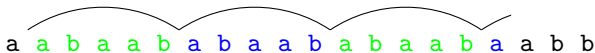
b a a a b a c a b a c a b a b c

**Najprostsze powtórzenia:** potęgi słów, np. kwadraty

b a a a b a c a b a c a b a b c

# Maksymalne powtórzenia

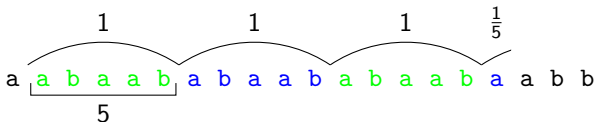
a a b a a b a b a a b a b a a b a a b b

The diagram shows the string "a a b a a b a b a a b a b a a b a a b b". Four arcs are drawn above the string, each connecting the start and end of a maximal repetition. The first arc connects the first 'a' to the second 'a'. The second arc connects the first 'a' to the second 'a' in the second "a a b" block. The third arc connects the first 'a' to the second 'a' in the third "a a b" block. The fourth arc connects the first 'a' to the second 'a' in the fourth "a a b" block. The characters 'a' and 'b' are color-coded: 'a' is green and 'b' is blue.

**Maksymalne powtórzenie** (ang. *run*) – powtórzenie, którego nie można rozszerzyć w żadną ze stron.



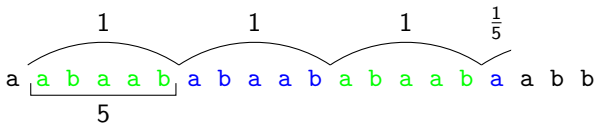
# Maksymalne powtórzenia



**Maksymalne powtórzenie** (ang. *run*) – powtórzenie, którego nie można rozszerzyć w żadną ze stron.

Dla maksymalnego powtórzenia  $v$  powyżej: okres  $\text{per}(v) = 5$ , wykładnik  $\text{exp}(v) = 3\frac{1}{5}$ .

# Maksymalne powtórzenia



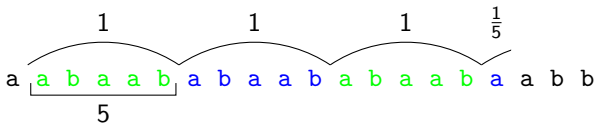
**Maksymalne powtórzenie** (ang. *run*) – powtórzenie, którego nie można rozszerzyć w żadną ze stron.

Dla maksymalnego powtórzenia  $v$  powyżej: okres  $\text{per}(v) = 5$ , wykładnik  $\text{exp}(v) = 3\frac{1}{5}$ .

Kluczowe własności maksymalnych powtórzeń:

- struktura wszystkich powtórzeń w słowie;
- $\text{runs}(n) = O(n)$ ,  $\text{expruns}(n) = O(n)$ ;
- algorytm  $O(n)$ .

# Maksymalne powtórzenia



**Maksymalne powtórzenie** (ang. *run*) – powtórzenie, którego nie można rozszerzyć w żadną ze stron.

Dla maksymalnego powtórzenia  $v$  powyżej: okres  $\text{per}(v) = 5$ , wykładnik  $\text{exp}(v) = 3\frac{1}{5}$ .

Kluczowe własności maksymalnych powtórzeń:

- struktura wszystkich powtórzeń w słowie;
- $\text{runs}(n) = O(n)$ ,  $\text{expruns}(n) = O(n)$ ;
- algorytm  $O(n)$ .

Dwie słynne hipotezy (Kolpakov, Kucherov, 1999):

1  $\text{runs}(n) < n$

2  $\text{expruns}(n) < 2n$

Dwie słynne hipotezy (Kolpakov, Kucherov, 1999):

- 1  $\text{runs}(n) < n$
- 2  $\text{expruns}(n) < 2n$  **NIE!**

$$2,035 n < \text{expruns}(n) < 4,1 n \quad (\text{R. i in.}, 2010)$$

Dwie słynne hipotezy (Kolpakov, Kucherov, 1999):

- 1  $\text{runs}(n) < n$  ???
- 2  $\text{expruns}(n) < 2n$  **NIE!**

$$2,035 n < \text{expruns}(n) < 4,1 n \quad (\text{R. i in.}, 2010)$$

Dwie słynne hipotezy (Kolpakov, Kucherov, 1999):

- 1  $\text{runs}(n) < n$  ???
- 2  $\text{expruns}(n) < 2n$  **NIE!**

$$2,035 n < \text{expruns}(n) < 4,1 n \quad (\text{R. i in.}, 2010)$$

$$\text{runs}(n) < 5 n \quad (\text{Rytter, 2006})$$

$$\text{runs}(n) < 3,48 n \quad (\text{Puglisi i in., 2008})$$

...

$$\text{runs}(n) < 1,029 n \quad (\text{Crochemore i in., 2008})$$

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.



# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

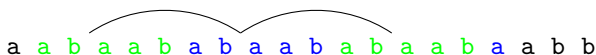
a a b a a b a b a a b a b a a b a a b b

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

a a b a a b a b a a b a b a a b a a b b



# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

a a b a a b a b a a b a b a a b a a b b

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

a a b a a b a b \* a a \* b a b a a b a a b b

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

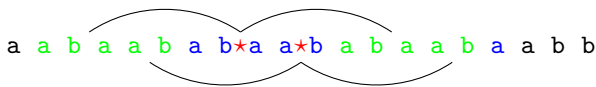
a a b a a b a b a a b a a b a a b b

Każdy *cubic run* daje co najmniej dwa **uchwyty Lyndona** +  
każda pozycja jest uchwytem Lyndona dla co najwyżej jednego  
*cubic run*  $\Rightarrow \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n$

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

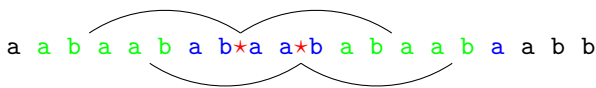


Każdy *cubic run* daje co najmniej dwa **uchwyty Lyndona** + każda pozycja jest uchwytem Lyndona dla co najwyżej jednego *cubic run*  $\Rightarrow \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n$

# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$



Każdy *cubic run* daje co najmniej dwa **uchwyty Lyndona** + każda pozycja jest uchwytem Lyndona dla co najwyżej jednego *cubic run*  $\Rightarrow \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n$



# Maksymalne powtórzenia sześciennie

**Maksymalne powtórzenie sześciennie** (ang. *cubic run*) – maksymalne powtórzenie, w którym okres powtarza się co najmniej trzykrotnie.

$$0,41 n < \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n \quad (\text{R. i in., 2010})$$

a a b a a b a b a a b a a b a a b b

Każdy *cubic run* daje co najmniej dwa **uchwyty Lyndona** + każda pozycja jest uchwytem Lyndona dla co najwyżej jednego *cubic run*  $\Rightarrow \text{cubic-runs}(n) < 0,5 n$

**TAK!**  $\text{runs}(n) < n$ ,  $\text{expruns}(n) < 3n$  (Bannai i in., 07.2014)

# Hipoteza

$\text{squares}(n)$  – maksymalna liczba różnych kwadratów  
w słowie długości  $n$

# Hipoteza

$\text{squares}(n)$  – maksymalna liczba różnych kwadratów  
w słowie długości  $n$

$$\text{squares}(n) < 2n \quad (\text{Fraenkel i Simpson, 1998})$$

# Hipoteza

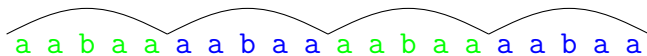
$\text{squares}(n)$  – maksymalna liczba różnych kwadratów  
w słowie długości  $n$

$$\text{squares}(n) < 2n \quad (\text{Fraenkel i Simpson, 1998})$$

$$\text{squares}(n) < n \quad ???$$

# Zagadnienia

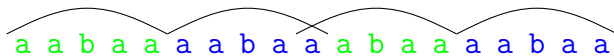
- 1 Powtórzenia w słowach
- 2 **Szablony**
- 3 Inne modele równości



The diagram shows a sequence of 16 characters: a a b a a a b a a a a b a a a a b a a. A black wavy line above the characters groups them into four identical cycles of four characters each: (a a b a), (a a b a), (a a b a), and (a a b a). The characters 'a' and 'b' are color-coded: 'a' is green and 'b' is blue.

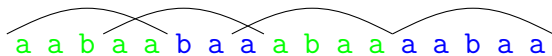
a a b a a a b a a a a b a a a a b a a

Słowo okresowe (potęga)



a a b a a a a b a a a b a a

Słowo z niedokładnym okresem

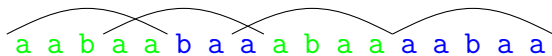


a a b a a b a a a b a a a a b a a

The diagram shows a sequence of 14 characters: a, a, b, a, a, b, a, a, a, b, a, a, a, a, b, a, a. Four overlapping arcs are drawn above the sequence, each spanning three characters. The first arc covers the first three characters (a, a, b). The second arc covers the second, third, and fourth characters (a, b, a). The third arc covers the fourth, fifth, and sixth characters (a, a, b). The fourth arc covers the seventh, eighth, and ninth characters (a, a, a). The characters are color-coded: the first three (a, a, b) are green; the next three (a, b, a) are blue; the next three (a, a, b) are green; and the last five (a, a, a, b, a) are blue.

Inne słowo z niedokładnym okresem





a a b a a b a a a b a a a a b a a

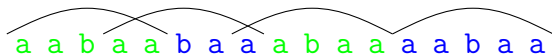
Słowo aabaabaa jest **szablonem** (ang. *cover*)

a b a a b a a a b a a a a b

Inny przypadek: szablon *wystaje* poza słowo

a b a a b a a a b a a a a b

Słowo aabaabaaab jest **quasi-szablonem** (ang. *seed*)



The diagram shows the string "a a b a a b a a b a a a a b a a" with characters colored in green, blue, and black. Four black arcs are drawn above the string, each spanning a substring of length 4: the first arc covers "a a b a", the second covers "a a b a", the third covers "a a b a", and the fourth covers "a a b a". The overlapping nature of these arcs illustrates how a single template can match multiple occurrences of a pattern in a text.

a a b a a b a a b a a a a b a a

Wróćmy do przypadku szablonu...

a a b a a b a a a b a a c a a b a a

Co jeśli tylko jedna pozycja nie pasuje?

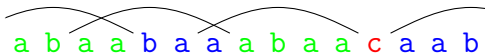
a a b a a b a a a b a a c a a b a a

Słowo aabaa jest  $\alpha$ -szablonem dla  $\alpha = \frac{17}{18}$   
(ang. *partial cover*)

a b a a b a a a b a a c a a b

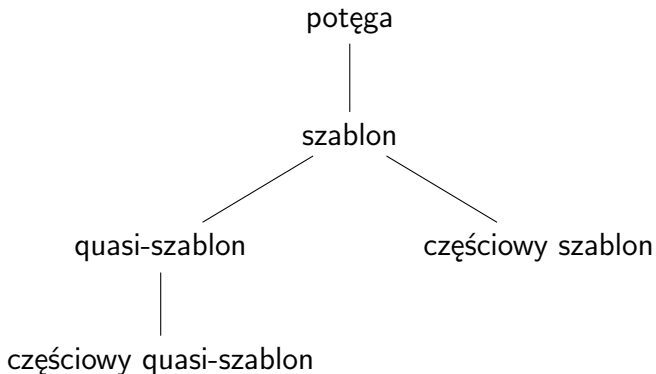
Podobnie...

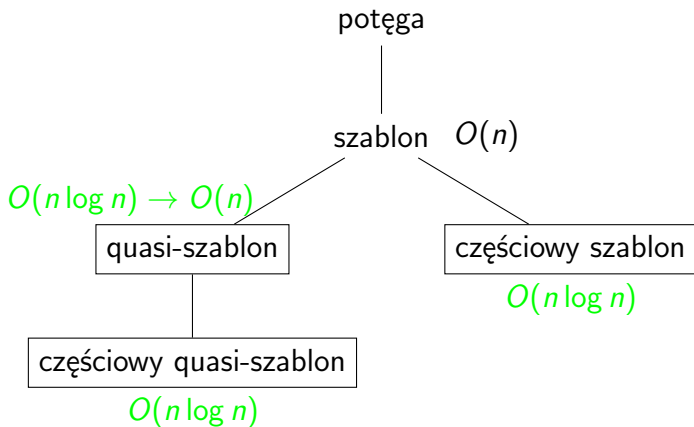
a b a a b a a a b a a c a a b



Słowo aabaa jest  $\alpha$ -**quasi-szablonem** dla  $\alpha = \frac{14}{15}$   
(ang. *partial seed*)







# Zagadnienia

- 1 Powtórzenia w słowach
- 2 Szablony
- 3 **Inne modele równości**

# Inne modele równości

$aabcbaab \approx ababacab$

Model abelowy (przemienne)

Dwa słowa są równe, jeśli ich multizbiory liter są takie same (tu:  $\{a, a, a, a, b, b, b, c\}$ ).

# Inne modele równości

aabcbaab  $\approx$  ababacab

Model abelowy (przemienny)

Dwa słowa są równe, jeśli ich multizbiory liter są takie same (tu:  $\{a, a, a, a, b, b, b, c\}$ ).

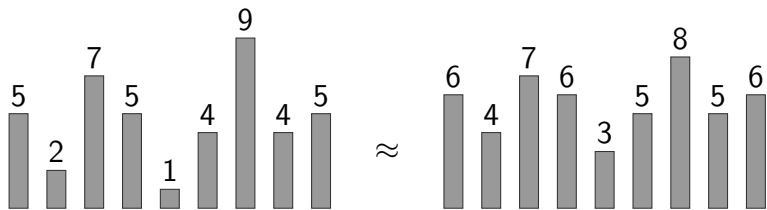
# Inne modele równości

aabcbaab  $\approx$  ababacab

Model abelowy (przemienny)

Dwa słowa są równe, jeśli ich multizbiory liter są takie same (tu:  $\{a, a, a, a, b, b, b, c\}$ ).

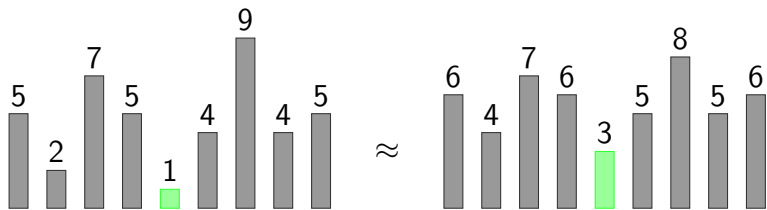
# Inne modele równości



Model jednakowych kształtów

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje rosnąca bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 9 \rightarrow 8$ ).

# Inne modele równości

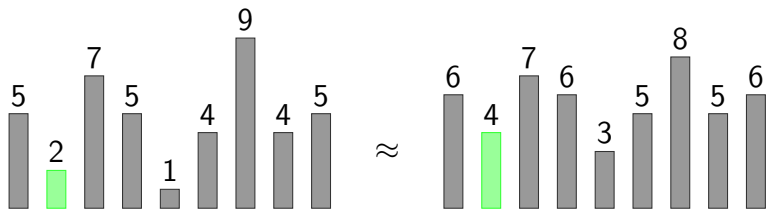


Model jednakowych kształtów

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje rosnąca bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 9 \rightarrow 8$ ).



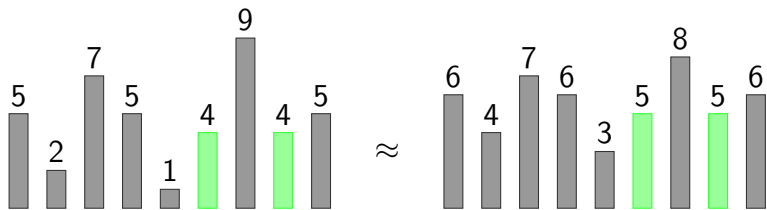
# Inne modele równości



Model jednakowych kształtów

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje rosnąca bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 9 \rightarrow 8$ ).

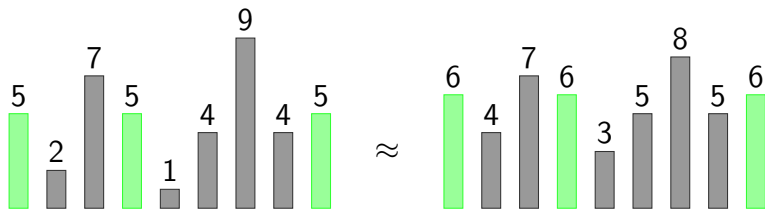
# Inne modele równości



Model jednakowych kształtów

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje rosnąca bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 9 \rightarrow 8$ ).

# Inne modele równości



Model jednakowych kształtów

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje rosnąca bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 7, 9 \rightarrow 8$ ).

# Inne modele równości

aacabcdaaca  $\approx$  cdcdbdaccdc

Model parametryzowany

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: a \rightarrow c, b \rightarrow b, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ ).

# Inne modele równości

aacab<sub>a</sub>bcdaaca  $\approx$  cc<sub>a</sub>dc<sub>a</sub>bdac<sub>a</sub>cc<sub>a</sub>dc<sub>a</sub>

Model parametryzowany

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: a \rightarrow c, b \rightarrow b, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ ).

# Inne modele równości

aacab**bc**daaca  $\approx$  ccdcb**bd**accdc

Model parametryzowany

Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: a \rightarrow c, b \rightarrow b, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ ).

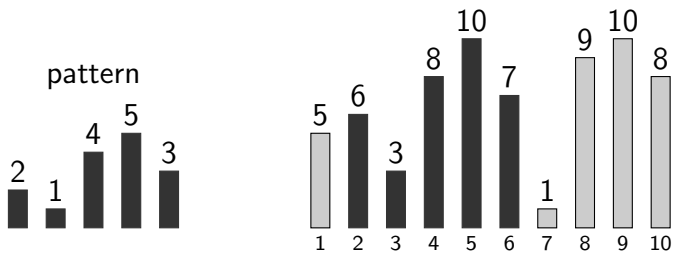
# Inne modele równości

aacab<sup>c</sup>cd<sup>a</sup>aa<sup>c</sup>a  $\approx$  cc<sup>d</sup>cb<sup>d</sup>ac<sup>c</sup>dc

Model parametryzowany

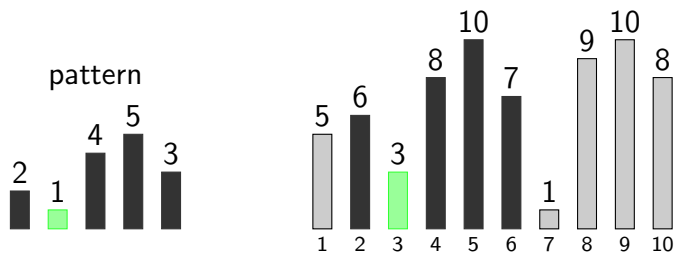
Dwa słowa  $u$  i  $v$  nad alfabetem, odpowiednio,  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  są równe, jeśli istnieje bijekcja  $f : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$  taka, że  $f(u) = v$  (tu  $f: a \rightarrow c, b \rightarrow b, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ ).

# Wyszukiwanie wzorca

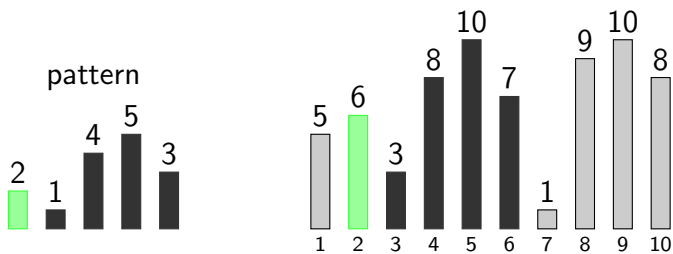




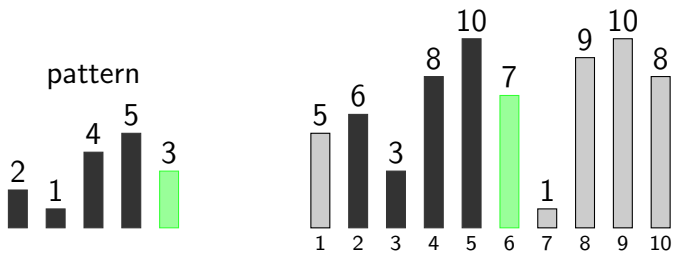
# Wyszukiwanie wzorca



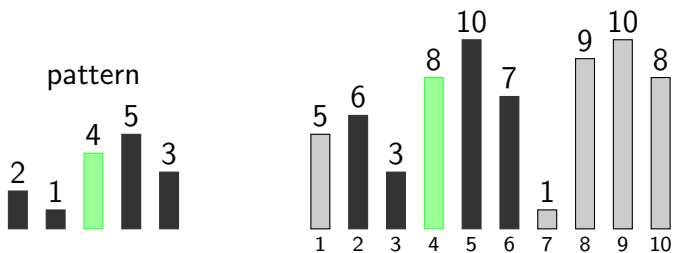
# Wyszukiwanie wzorca



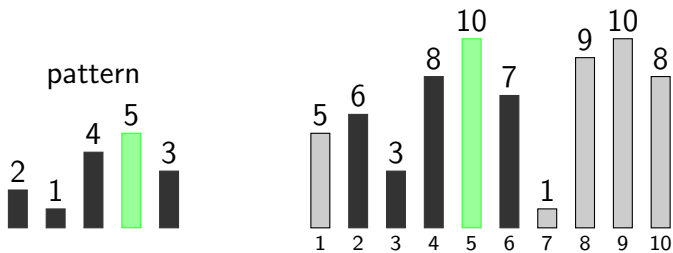
# Wyszukiwanie wzorca



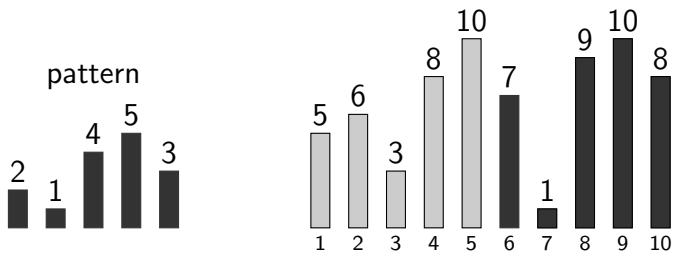
# Wyszukiwanie wzorca



# Wyszukiwanie wzorca



# Wyszukiwanie wzorca



$n$  – długość tekstu;  $m$  – długość wzorca

Model abelowy:

- jeden wzorzec:  $O(n + m)$
- wiele wzorców, alfabet binarny: rozmiar  $O(n)$ , zapytanie  $O(1)$  (Cicalese, 2009)
- wiele wzorców, stały alfabet: rozmiar i konstrukcja  $o(n^2)$ , zapytanie  $o(m)$  (Kociumaka, R., Rytter, 2013)

Model jednakowych kształtów:

- jeden wzorzec:  $O(n + m)$  (R. i in., 2013)
- wiele wzorców: konstrukcja  $O(n \log \log n)$ , zapytanie  $O(m)$  (R. i in., 2013)

Model parametryzowany:

- jeden wzorzec:  $O(n + m)$  (Baker, 1993)
- wiele wzorców: konstrukcja  $O(n)$ , zapytanie  $O(m)$  (Cole i Hariharan, 2003)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełny okres



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełny okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b |  | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełny okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b |  | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełny okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełny okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b | a | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Zwykły okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Słaby okres

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Pełne okresy  $O(n \log \log n) \rightarrow O(n)$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b | a | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Zwykłe okresy  $O(n^2) \rightarrow O(n \log \log n)$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | a | a | b | c | b | a | a | b | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Słabe okresy  $O(n^3) \rightarrow O(n^2)$

# Zespół



Tomasz Kociumaka



Wojciech Rytter



Tomasz Waleń



Marcin Kubica



Maxime Crochemore



Costas Iliopoulos



CPM 2014

Information Processing Letters (2013)

CPM 2013

ESA 2013

SPIRE 2013

STACS 2013

Journal of Computer and System Sciences (2012)

SODA 2012

IWOCA 2010

LATA 2010

# Olimpiada Informatyczna

„Szablon”, XII Olimpiada Informatyczna

„Przyspieszenie algorytmu”, XVI Olimpiada Informatyczna

„Chomiki”, XVII Olimpiada Informatyczna

„Prawie szablon”, Potyczki Algorytmiczne 2009

„Logo”, CEOI 2011

„Multidrink”, XX Olimpiada Informatyczna

„Ciągi”, Potyczki Algorytmiczne 2014

Dziękuję!

Dziękuję za uwagę!